ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков[2] (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = i x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле вдоль оси x_1. Число $e_1 > 0$ — напряженность электрического поля, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

Среди состояний, описываемые гамильтонианом (1), особый интерес представляют состояния системы, отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] был предложен метод построения асимптотики спектра около границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении для асимптотических собственных функций. С его помощью в статьях [3], [4] были найдены асимптотики серий собственных значений оператора (1) вблизи границ спектральных кластеров при малых значениях напряженности e_1. В данной работе рассмотрен случай, когда e_1 принимает произвольные положительные значения и не является малым параметром.

[1]Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

[2]© Перескоков А.В. , 2021

Тогда [5] вблизи верхних границ спектральных кластеров имеется серия собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m\sqrt{9n^2e_1^2+1} - \varepsilon^2 n^4 e_1^2(4n^2+9n|m|-6m^2)- \\ -18\varepsilon^2 n^4 e_1^2(n-|m|)(k+1/2) + O(\varepsilon^2 n^4) + O(\varepsilon^3 n^{10}),\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\varepsilon \to +0$, $k = 0,1,2,\ldots$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/5}$, $1 \ll |m| < n$.

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана — Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Поскольку гамильтониан (1) содержит параметр e_1, то возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ Карасева — Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Литература

1. Карасев М.В. Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода / М.В. Карасев, Е.М. Новикова // ТМФ. — 2005. — Т. 142, № 3. — С. 530–555.

2. Перескоков А.В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осцилятора вблизи границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // Изв. РАН, сер. мат. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 165–210.

3. Мигаева А.С. Асимптотика спектра атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях вблизи нижних границ спектральных кластеров / А.С. Мигаева, А.В. Перескоков // Мат. заметки. — 2020. — Т. 107, № 5. — С. 734–751.

4. Pereskokov A.V. On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in orthogonal electric and magnetic fields near the upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // Russ. J. Math. Phys. — 2019. — Т. 26, № 3. — PP. 391–400.

5. Migaeva A.S. Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters / A.S. Migaeva, A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — Т. 251, № 6. — PP. 850–875.