IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. **II тур.** *9 января 2004 года.*

1. В ΔABC угол B равен 60˚, I-центр вписанной окружности. C' - точка, симметричная точке C относительно середины отрезкаBI. Докажите, что угол CAB вдвое больше угла C'AB.
2. Поезд в метро тормозит и ускоряется с одинаковым по модулю ускорением. Длина поезда равна длине остановочной платформы на станции, причём во время остановки начало поезда точно совпадает с началом платформы. В каких точках поезда должен разместиться человек, чтобы наблюдать за происходящим на станции как можно дольше?
3. Найдите все натуральные числа m, для которых при каких-нибудь натуральных числах k и p выполняется равенство $x_k=y_p$, если известно, что $x_1=x_2=m$, $y_1=y_2=-m$, а $x_{n+2}=x_{n+1}x_n+x_n+1$, $y_{n+2}=y_{n+1}y_n+y_n+1$ при всех натуральных n.
4. Можно ли во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставить по одному все целые числа (каждое целое число – ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа среди четырёх соседних (по стороне) были два числа, больших его, и два числа, меньших его?
5. Вписанная окружность треугольника ABC ($\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$) касается сторон треугольника AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1. На отрезке A_1B_1 отметили точку M такую, что $\angle A_1MB=\angle B_1MA$. Найдите $\angle C_1MA_1$.
6. Можно ли выложить полный комплект из 28 доминошек (0-0, 0-1, 0-2, …, 0-6, 1-1, 1-2, …, 5-5, 5-6, 6-6) в виде какого-нибудь прямоугольника (внутри прямоугольника не должно быть пустот) так, чтобы и во всех строках были равные суммы цифр, и во всех столбцах были равные суммы цифр?
7. Функция $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ удовлетворяет условиям: $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n + 1) = f(2n) + 1$. Для скольких натуральных n из промежутка от 1 до 2004 включительно $f(n)=7$?
8. Незнайка закрасил в белом квадрате 10×10 несколько (может быть, и ноль) рядов одного направления в чёрный цвет (но не весь квадрат). Какое минимальное количество клеток может назвать Знайка так, чтобы по ответам Незнайки про их цвет узнать, какие же ряды закрасил Незнайка?

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Первая лига. **II тур.** *9 января 2004 года.*

1. В некоторой компании 25 акционеров, причём любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?
2. Поезд в метро тормозит и ускоряется с одинаковым по модулю ускорением. Длина поезда равна длине остановочной платформы на станции, причём во время остановки начало поезда точно совпадает с началом платформы. В каких точках поезда должен разместиться человек, чтобы наблюдать за происходящим на станции как можно дольше?
3. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и C, пересекает стороны AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Оказалось, что точки A_1, B, C_1 и точка P пересечения прямых AA_1 и CC_1 образуют описанный четырёхугольник. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.
4. Можно ли во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставить по одному все целые числа (каждое целое число – ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа среди четырёх соседних (по стороне) были два числа, больших его, и два числа, меньших его?
5. Вписанная окружность треугольника ABC ($\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$) касается сторон треугольника AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1. На отрезке A_1B_1 отметили точку M такую, что $\angle A_1MB=\angle B_1MA$. Найдите $\angle C_1MA_1$.
6. Верно ли, что если взять любые два угла любого треугольника, то перед одним из них можно написать *sin*, а перед другим *cos* так, чтобы сумма двух получившихся чисел была бы не больше $\sqrt{2}$?
7. Можно ли выложить полный комплект из 28 доминошек (0-0, 0-1, 0-2, …, 0-6, 1-1, 1-2, …, 5-5, 5-6, 6-6) в виде какого-нибудь прямоугольника (внутри прямоугольника не должно быть пустот) так, чтобы и во всех строках были равные суммы цифр, и во всех столбцах были равные суммы цифр?
8. Решите в натуральных числах уравнение $1^1+2^2+3^3+\ldots+1000^{1000}=n^k$.