V Кубок памяти А. Б. Воронецкого.
Отборочный тур

Задача 1. Длины сторон треугольника - целые числа. Докажите, что ни одна из его медиан не может иметь длину 1.

Задача 2. Некоторое число увеличили на n %, затем – на (n+5) %, а затем уменьшили сначала на n %, а затем на (n+5) %. В итоге получилось, что первоначальное число уменьшилось на 10%. Найти n.

Задача 3. Можно ли расставить на доске 2004×2004 натуральные числа так, чтобы сумма чисел в 1-й строке была равна произведению чисел в 1-м столбце, …, сумма чисел в 2004-й строке была равна произведению чисел в 2004-м столбце?

Задача 4. Решить систему $\begin{cases} y = \arcsin \sin x \\ x^2 + y^2 = \pi^2 \end{cases}$.

Задача 5. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой группе и 5 во второй изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

Задача 6. Докажите, что любой квадратный трехчлен можно представить в виде суммы двух квадратных трехчленов, не имеющих корней.

Задача 7. а) Существует ли такое семизначное число, в записи которого нет повторяющихся цифр, что если взять в нем любые три подряд идущие цифры, то трехзначное число, образованное ими, будет кратно 3, а если взять в нем любые четыре подряд идущие цифры, то четырехзначное число, образованное ими, будет кратно 4? б) А восьмизначное число с такими же свойствами?

Задача 8. Два пирата Джон и Роджер играют в следующую игру. Ходят по очереди. Первым ходом Джон кладет на стол 1 пиастр. Каждым следующим ходом каждый пират обязан положить на 1 пиастр больше или меньше, чем предыдущим ходом положил его противник. При этом он обязан положить хотя бы один пиастр. Если после хода одного из пиратов сумма денег на столе становится кратной 10 пиастрам, то его соперник забирает все монеты, т.е. соперник выигрывает. Кто из пиратов выиграет? Опишите его выигрышную стратегию.

Задача 9. Трапеция описана около круга. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания окружности с основаниями трапеции, и прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, проходят через точку пересечения диагоналей.

Задача 10. В прямоугольнике ABCD опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Доказать, что угол BMN прямой.

Задача 11. Доказать, что для положительных чисел a,b,c выполнено неравенство: $abc \ge (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Задача 12. Двузначное число не делится на 3. Делится ли на 3 сумма квадратов его цифр?