XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 4 тур. 1 октября 2015 года.

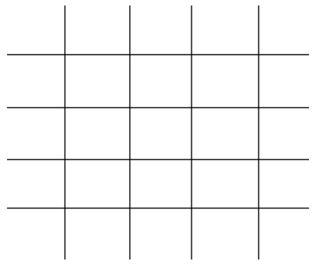
<u>Высшая лига (бои за 5-8 места). Первая лига.</u> Решения.

1. Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c).$$

<u>Доказательство:</u> $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c) \Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 \geq 0$ – верное неравенство.

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы каждая прямая пересекала ровно четыре другие?



<u>Ответ:</u> 8 прямых, например, 2 семейства по 4 параллельных прямых (см. рис.). ***<u>Доказательство оценки:</u>*** Рассмотрим некоторую прямую а, тогда существуют 4 непараллельные ей прямые, которые должны пересечься с прямой а, и ещё максимум 3 параллельных ей прямых, т.к. иначе любая непараллельная ей прямая будет пересекать больше 4 прямых.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 99. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 100. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.В.Шаповалов*)

<u>Ответ:</u> Выигрывает Петя. ***<u>Доказательство оценки:</u>*** Первым ходом он вычеркивает тройку 1, 50, 99, а все остальные числа мысленно разбивает на пары с суммой 100. Вася не может зачеркнуть два числа из одной пары, так как третьим к ним должно быть число 50, а его уже нет. Поэтому в ответ на Васин ход Петя вычеркивает вторые числа из затронутых Васей пар. Так как сумма трёх пар равна 300, то сумма Петиной тройки будет 300–{вычеркнутые Васей 150}=150. У Пети всегда есть ход, поэтому он не проиграет, а так как игра конечна, то выиграет.

4. Клетки шахматной доски занумерованы числами 1, 2, …, 64. Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, чьи номера отличаются не более чем на 30. (*А.В.Шаповалов*)

***<u>Решение</u>*:** Пусть все разности не менее 31. Тогда у каждой из клеток с номерами 31, 32, 33, 34 не более, чем по 3 соседа, поэтому эти клетки лежат на краю доски. Рассмотрим клетки 31 и 32. Если обе они не угловые, то у них ровно по 3 соседа, причем два общих: №63 и №64. Такое возможно, только если они – соседи угловой клетки. Если же одна из клеток 31 и 32 угловая, то у них есть общий сосед, поэтому другая клетка будет третьей от угла. Также вблизи угла лежат пары (32, 33) и (33, 34). Но, получается, все они одного цвета и вблизи одного угла, что невозможно.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 20152015$?

<u>Ответ:</u> 0 решений. ***<u>Решение:</u>*** Докажем, что это уравнение не имеет решений с помощью метода остатков. Квадрат чётного числа делится на 4 и при делении на 8 даёт либо остаток 0, либо остаток 4, а квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1: $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1\equiv 1 \pmod 8$ (так как n и $(n+1)$ – числа разной чётности, то $n(n+1)$ – чётно и тем самым $4n(n+1)$ делится на 8). Значит, сумма трёх точных квадратов будет давать при делении на 8 следующие варианты остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (находим перебором), но никогда не даст остатка 7. А 20152015 при делении на 8 даёт тот же остаток, что число, записанное последними тремя цифрами (в нашем случае 015), то есть, как раз остаток 7. Следовательно, равенство невозможно.

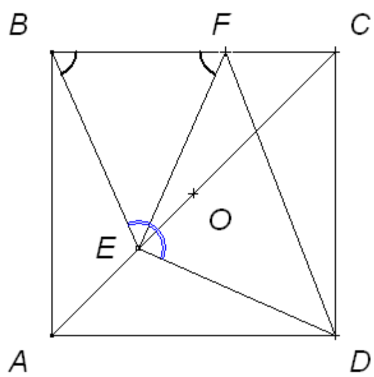
<u>Комментарий:</u> Сначала можно было бы рассмотреть остатки квадрата по модулю 4 – а это 0 и 1, у числа 2052015 остаток равен 3, значит, у нас все три остатка 1, т.е. сами наши числа – нечётные. Затем рассуждая по модулю 8, получаем, что сумма квадратов трёх нечётных чисел должна давать остаток 3, но 20152015 имеет остаток 7 – противоречие, значит, уравнение не имеет решений в целых числах.

6. Туристическое агентство Орлятии предлагает кольцевые автобусные маршруты по стране. Каждый маршрут проходит по городам маршрута ровно по разу. Есть маршруты из 3, 4, 5, 6 и 7 городов. Какое наименьшее число автодорог может быть в Орлятии, если каждая дорога

соединяет два города и не проходит через другие города. (С дороги на другую дорогу вне города переехать нельзя.)

Ответ: 9. ***Доказательство оценки*:** Допустим, есть не более 8 дорог. Будем кольцевые маршруты называть циклами. 7 дорог входят в цикл 7 городов. Если 8-я дорога не соединяет города из этого цикла, она не входит ни в какой цикл. А если соединяет, то с её участием добавляются два новых цикла. В любом случае, всего циклов – не более 3. ***Пример:*** Обозначим города буквами, а дороги – парами букв. Пусть кроме дорог цикла из 7 городов *ABCDEFG* есть ещё дороги *AC* и *AD*. Тогда есть циклы из любого нужного числа городов от 3 до 7: *ABC*, *ABCD*, *ADEFG*, *ACDEFG* и *ABCDEFG*.

7. Дан квадрат *ABCD*. На отрезках *AC* и *BC* выбраны точки *E* и *F* соответственно так, что *FE*=*ED*. Найдите угол *FDE*.



Ответ: 45°. ***Решение*:** Заметим, что диагональ *AC* является осью симметрии квадрата, значит, в силу этой симметрии $BE=ED$ и $\angle BEC=\angle DEC$. Тогда $BE=ED=FE$ и *BEF* – равнобедренный треугольник. Пусть $\angle FBE=\alpha=\angle BFE$, тогда из треугольников *BEF* и *BEC* находим $\angle BEF=180°-2\alpha$, $\angle BEC=180°-\angle CBE-\angle BCE=180°-\alpha-45°=135°-\alpha$. Значит, $\angle FED=\angle BED-\angle BEF=2\angle BEC-\angle BEF=2\cdot(135°-\alpha)-(180°-2\alpha)=90°$. Следовательно, треугольник *FED* является равнобедренным ($FE=ED$) прямоугольным, значит, его острый угол $\angle FDE=45°$.

Комментарий: Из условия следует, что точка *E* должна находиться внутри отрезка *AO* (см. рис.), где *O* – центр квадрата, иначе не будет существовать точки *F*.

8. Натуральные числа от 1 до 30 000 выписаны по порядку:

123456789101112…2999930000.

Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2015 (именно в этом порядке)?

Ответ: 25 раз. ***Решение*:** Рассмотрим случаи, как могла возникнуть комбинация 2015. 1) 2015 полностью входит в число, тогда она либо является концом числа (2015, 12015, 22015 – *3 варианта*), либо началом пятизначного числа (2015… – *10 вариантов*). 2) 201 – конец предыдущего числа, 5 – начало следующего, что возможно только для соседних четырёхзначных чисел 5201 и 5202, т.к. пятизначных чисел, начинающихся с 5, у нас нет (*1 вариант*). 3) 20 – конец предыдущего числа, 15 – начало следующего, тогда либо это соседние четырёхзначные числа 1520 и 1521 (*1 вариант*), либо соседние пятизначные 15…20 и 15…21 (*10 вариантов*). 4) 2 – конец предыдущего числа, 015 – начало следующего, что невозможно. Всего получаем 3+10+1+1+10=25 вариантов.