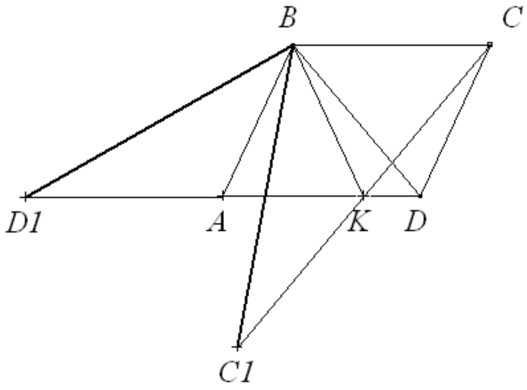
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. 4 тур. Полуфинал. 25 сентября 2014 года. *Решения*.

1. В параллелограмме *ABCD* диагональ *BD* равна сторонам *BC* и *AD*. На стороне *AD* выбрана такая точка *K*, что *AB*=*BK*. Точка C_1 симметрична *C* относительно *K*, а точка D_1 симметрична *D* относительно *A*. Докажите, что $BC_1=BD_1$.



***Решение*:** Заметим, что у равнобедренных треугольников *ABK* и *DBC* равные углы при основании ($\angle BAK=\angle BCD$ – равные углы параллелограмма), значит, эти треугольники подобны, следовательно, $\angle ABK=\angle DBC$, $\angle ABD=\angle ABK+\angle KBD=\angle DBC+\angle KBD=\angle KBC$. Значит, треугольники *ABD* и *KBC* равны по двум сторонам (*AB*=*BK*, *BD*=*BC*) и углу между ними ($\angle ABD=\angle KBC$). Тогда $\angle ADB=\angle KCB$ и *AD*=*KC*. Следовательно, $DD_1=2AD=2KC=CC_1$. Тогда треугольники BDD_1 и BCC_1 равны по двум сторонам ($DD_1=CC_1$, $BD=BC$) и углу между ними ($\angle BDD_1=\angle BCC_1$), значит, $BC_1=BD_1$.

2. На шахматную доску 8×8 по одному выставляют ферзей. Очередной ферзь бьёт не более одного из ранее поставленных. Какое наибольшее число ферзей можно выставить на доску? (*Д.Ю.Кузнецов*)

Ответ: 14 ферзей, пример см. на рис., где число показывает порядок постановки ферзей методом «пропеллера». ***Доказательство оценки* 1:** Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы – вершины двух долей, а ребро – ферзь на пересечении соответствующих строки и столбца. Тогда в этом графе не должно быть циклов, иначе последний по очереди из цикла поставленный на доску ферзь будет бить не менее двух ферзей, что противоречит условию. Значит, граф представляет из себя лес, а тогда в нём рёбер не больше чем количество вершин минус 1, что соответствует дереву, т.е. количество рёбер-ферзей не больше 16–1=15. Предположим, что есть пример на 15 ферзей, тогда из выше приведённых рассуждений следует, что соответствующий двудольный граф будет деревом, т.е. между любыми двумя ферзями-рёбрами есть путь, состоящий из горизонтально-вертикальных ходов по клеткам, занятым только ферзями. Но доска разбивается на 14 диагоналей (по 7 диагоналей каждого цвета, параллельных главной диагонали соответствующего цвета). Тогда по принципу Дирихле найдутся 2 ферзя, стоящие на одной диагонали, тогда ход по диагонали замыкает путь между этими 2 ферзями, проходящий горизонтально-вертикальными ходами по клеткам, занятым ферзями (но уже в графе ходов ферзя). Тогда последний из поставленных по очереди в этом цикле ферзь бьёт в момент постановки по крайней мере двух ферзей, что противоречит условию. ***Доказательство оценки* 2:** Рассмотрим 8 вертикалей, 8 горизонталей и 14 диагоналей (7 чёрных одного направления и 7 белых другого направления). Первый ферзь занимает 3 из этих 30 рядов, а каждый следующий ферзь занимает как минимум два новых ряда, т.к. на одном из его рядов уже мог стоять ферзь, которого он бьёт. Значит, после первого ферзя можно выставить еще не более [(30–3):2]=13 ферзей, т.е. на доску можно выставить не более 1+13=14 ферзей.

4				5	6	7	8
3							
2							
1							
							9
							10
							11
	14	13	12				

3. Можно ли клетчатый квадрат 100×100 разрезать по границам клеток на 110 прямоугольников так, чтобы периметры всех частей были различными? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Нельзя. ***Решение:*** Предположим, что можно разрезать нужным нам образом. Докажем лемму: при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение растёт. Действительно $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$, но $(x+y)^2$ – фиксированное число, а

$(x–y)^2$ – убывающая величина, значит, их разность возрастает. Таким образом, из леммы следует, что при фиксированной сумме линейных размеров (полупериметре) площадь растёт при сближении сторон между собой (максимальная площадь будет у квадрата) и убывает при обратном процессе. Рассмотрим полупериметры – суммы двух линейных размеров прямоугольников, они также будут различны. Упорядочим полупериметры: $p_1<p_2<\ldots<p_{110}$ – различные натуральные числа. Тогда $p_1\geq 2$, $p_2\geq 3$, …, $p_{100}\geq 101$. По лемме для площадей этих прямоугольников выполняются неравенства: $S_1\geq 1\cdot 1=1$, $S_2\geq 1\cdot 2=2$, …, $S_{100}\geq 1\cdot 100=100$. Для 10 прямоугольников с наибольшими полупериметрами выполняются неравенства $p_{101}\geq 102$, $p_{102}\geq 103$, …, $p_{110}\geq 111$, но при этом сторона не может превышать 100, значит, по лемме $S_{101}\geq 100\cdot 2=200$, $S_{102}\geq 100\cdot 3=300$, …, $S_{110}\geq 100\cdot 11=1100$. Тогда суммарная площадь всех прямоугольников не меньше $1+2+3+\ldots+99+100+200+300+\ldots+1100=101\cdot 100/2+1300\cdot 10/2=101\cdot 50+1300\cdot 5=11550$, что больше площади исходного квадрата $100^2=10000$. Противоречие. Значит, требуемое разрезание невозможно.

4. Семья рыбаков – отец и 7 сыновей – хочет переправить боевую группу на Тайный остров архипелага в тылу врага. Есть двухместная лодка. Не запомнив дороги, без проводника её не проплыть. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но всех проводить он не сможет: путь лежит мимо Сторожевой башни, и каждый из них может пройти мимо неё не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Рыбак запоминает дорогу, если проплыл по ней один раз, а бойцу для этого надо проплыть туда и обратно. В конце все рыбаки должны быть дома, все бойцы – на острове, лодка – где придётся. Какую наибольшую по численности группу бойцов можно переправить? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: 18 бойцов. ***Решение:*** *Алгоритм переправки.* Пусть отец сходит туда-обратно с бойцом. Тогда у нас в доме будет такая ситуация: есть двое проводников, то есть знающих дорогу и не исчерпавших лимит рейсов – боец *A* (у которого ещё три рейса) и рыбак *G* (у которого ещё формально три, но на деле – всего два рейса, из третьего он домой не вернётся). Покажем, что если в доме есть ещё не знающий дороги рыбак *H*, то ситуацию можно воспроизвести, доставив на остров ещё двух бойцов. Обозначим никуда не ходивших бойцов *B* и *C*, и выполним такие переправы: $GH\rightarrow$, $G\leftarrow$, $AB\rightarrow$, $A\leftarrow$, $AC\rightarrow$, $HB\leftarrow$. Теперь проводниками стали рыбак *H* и боец *B*, а бойцы *A* и *C* – на острове. Когда не знающих дороги рыбаков не останется, двое проводников (снова обозначим их A и G) смогут переправить на остров *A* и ещё трёх бойцов *B*, *C* и *D*: $GC\rightarrow$, $G\leftarrow$, $AB\rightarrow$, $A\leftarrow$, $AD\rightarrow$. Итого 7 первых пар переправили по два бойца, а последняя пара – 4 бойца, всего – 18 бойцов.

Оценка. Дадим всем рыбакам по 2 монеты. Если проводник идет с бойцом-непроводником с острова домой, он отдает бойцу монету (после чего боец становится проводником). Если проводник идёт назад один – он выкидывает монету. Рыбак идет назад не более 2 раз, поэтому монет ему хватит. Боец, став проводником, получит монету, и пойдёт назад не более одного раза – ему монет тоже хватит. Рейсов назад в одиночку не больше числа монет, то есть не более 16. После первого рейса на острове два человека, дальше после каждой пары рейсов число увеличивается на 1 только если туда плыли двое, а обратно – один, итого на острове станет не более 2+16=18 человек.

5. Плоскую жёсткую прямоугольную картину накрыли треугольной скатертью. Докажите, что можно, не разрезая скатерть, обернуть ею картину с двух сторон. (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Подвернём скатерть со всех сторон (параллельно перенося стороны) так, чтобы все вершины квадрата оказались на границе подвёрнутой скатерти (см. рис.1). Тогда возможны три случая. 1) Квадрат закрыл вершину прямого угла треугольника – см. рис. 2) Одна сторона квадрата лежит на стороне треугольника – см. рис. 3 (здесь возможны вариации с расположением этой стороны квадрата – попадает или не попадает вершина квадрата в вершину треугольника). 3) На трёх сторонах треугольника по одной вершине квадрата – см. рис.4. Но в любом из случаев достаточно очевидны действия – загнём куски скатерти симметрично

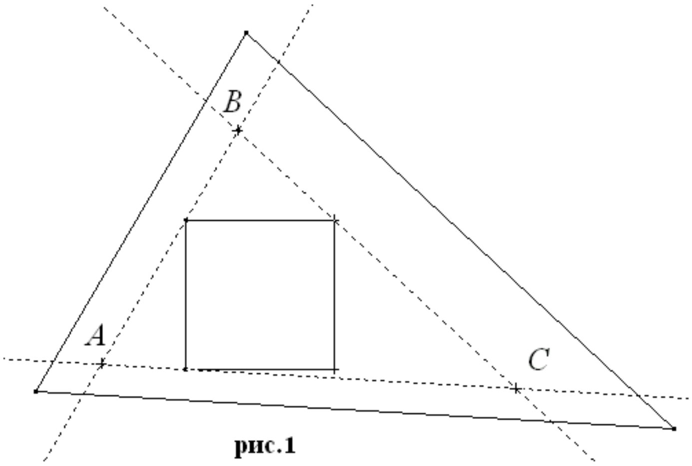


рис.1

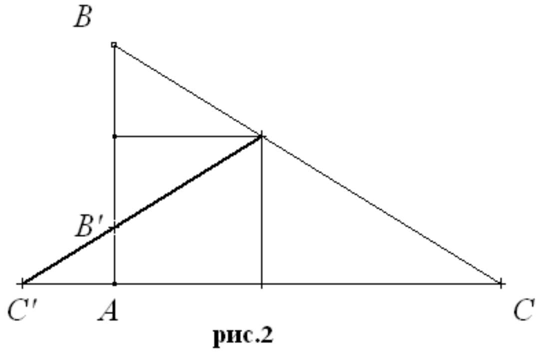


рис.2

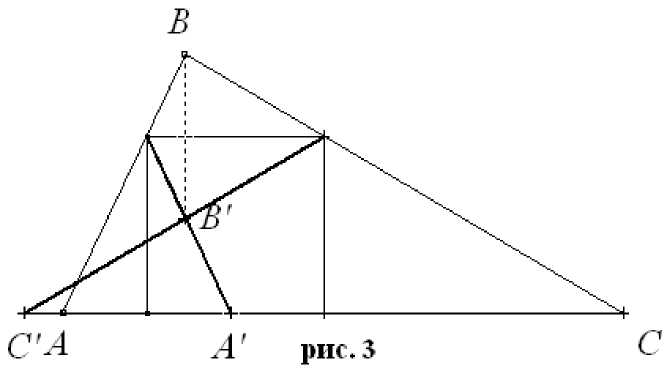


рис. 3

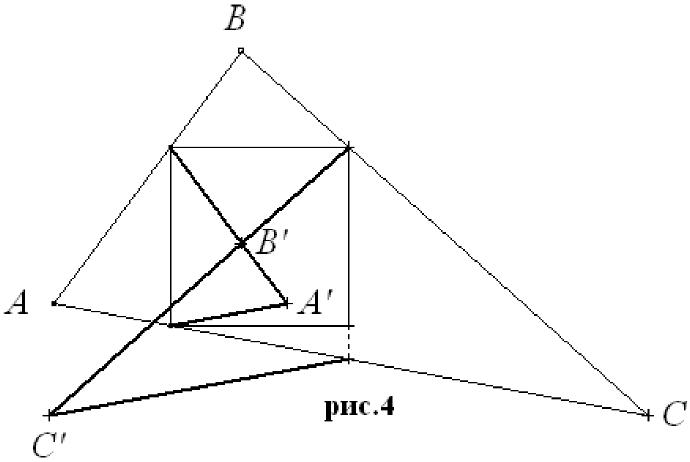


рис.4

относительно сторон треугольника. Далее нетрудно доказать, что эти куски скатерти во второй раз закроют всю картину. Для этого воспользуемся доказательством случая на рис. 2, проведя из каждой вершины перпендикуляры к сторонам, разрезав квадрат этими перпендикулярами на прямоугольники (рис.5), каждый из которых закрывается, что следует из доказательства на рис. 2.

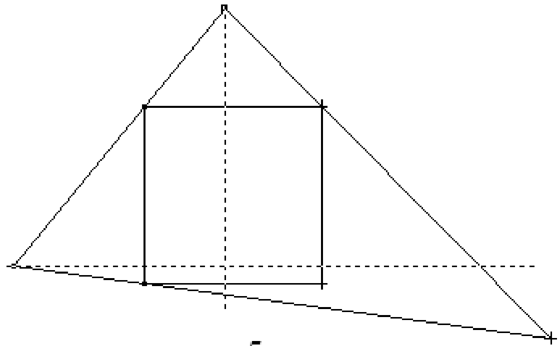


рис.5

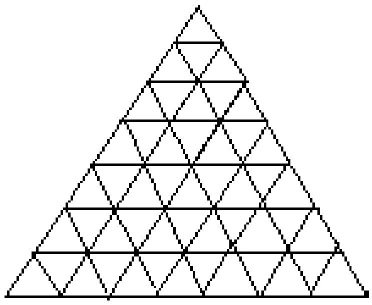
6. Известно, что $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}=1$**. Какие значения может принимать выражение** $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}$**?**

Ответ: 0. ***Решение*:** Умножим исходное равенство на ($a+b+c+d$), если эта сумма не равна 0. Получим $\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\right)(a+b+c+d)=a+b+c+d$, где левая часть после раскрытия скобок превращается в сумму $\frac{a^2}{b+c+d}+a+\frac{b^2}{c+d+a}+b+\frac{c^2}{d+a+b}+c+\frac{d^2}{a+b+c}+d$. После сокращения в обеих частях суммы ($a+b+c+d$), получим, что требуемая нам сумма дробей равна 0. Если же $a+b+c+d=0$, то наша сумма дробей принимает вид $\frac{a^2}{-a}+\frac{b^2}{-b}+\frac{c^2}{-c}+\frac{d^2}{-d}=-(a+b+c+d)$, что также равно 0. Заметим при этом, что во втором случае ни одно из чисел не может равняться 0, иначе выражение не имеет смысла.

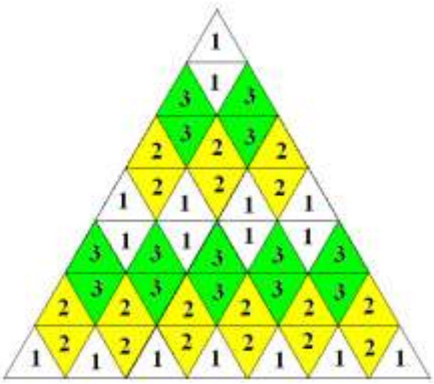
7. Докажите, что для каждого натурального *n* найдётся такое нечётное простое число *p*, что остаток от деления *n* на *p* равен (*p*–1)/2.

***<u>Доказательство</u>*:** Рассмотрим нечётное число $2n+1$, где $n\geq 2$. Тогда это нечётное число $2n+1\geq 3$ представляем в виде произведения двух нечётных множителей $2k+1$ и p, один из которых p будет нашим простым нечётным числом, а $2k+1$ при этом может равняться 1 (k – целое неотрицательное число), если число $2n+1$ окажется простым. Тогда из равенства $2n+1=(2k+1)p$ следует, что $n=kp+(p-1)/2$, что и будет соответствовать нужному нам факту, что у числа n будет остаток $(p-1)/2$ при делении на простое нечётное число p. Заметим, что $(p-1)/2$ в силу нечётности p окажется натуральным числом, меньшим p, т.е. действительно остатком. Неполное частное k при этом может оказаться равным 0.

8. Равносторонний треугольник со стороной 7 разбит на равносторонние треугольные клетки со стороной 1 (см. рисунок). Каждая из клеток покрашена в один из трёх цветов. В каждой шестёрке клеток с одной общей вершиной есть все 3 цвета. Обязательно ли найдется составленный из 4 клеток равносторонний треугольник со стороной 2, в котором есть все 3 цвета? (*С.Г.Волченков, О.И.Южаков*)



<u>Ответ:</u> Необязательно, см. контр-пример на рисунке.



X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. 4 тур. Бои за 5-12 места. 25 сентября 2014 года. *Решения*.

1. Натуральные числа *a, b, c* таковы, что *abc* +2*ab*+ 2*ac* +2*bc*+ 4*a* +4*b* +4*c* =97. Чему может быть равна сумма *a* + *b* + *c*?

<u>Ответ:</u> 9. ***<u>Решение</u>*****:** Добавим 8 к обеим частям равенства: $abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c+8=105$. Разложим левую часть на множители $(a+2)(b+2)(c+2)=105$, причём каждая скобка будет натуральным числом не меньшим 3, а 105 раскладывается только на три простых множителя $3\cdot5\cdot7$. Значит, наши три множители-скобки это числа 3, 5 и 7 в некотором порядке. Тогда их сумма $(a+2)+(b+2)+(c+2)=3+5+7$, откуда $a+b+c=9$.

2. В турнире по футболу участвовали 30 команд. Было сыграно 29 матчей. Игра каждой команды оценивалась по 10-балльной шкале. Докажите, что спортивный эксперт может так выставить оценки всем командам, чтобы была выставлена хотя бы одна десятка и в каждой паре игравших команд сумма оценок равнялась 18. (*А.В.Шаповалов*)

<u>Доказательство</u>**:** Рассмотрим граф, в котором команды – вершины, а матчи – рёбра. Если есть изолированная вершина, то дадим соответствующей команде 10, а остальным – 9, тогда в каждой паре сыгравших сумма оценок равняется 18. Если же изолированных вершин нет, то найдётся компонента связности, в которой рёбер меньше, чем вершин, т.к. в сумме рёбер меньше количества вершин. Тогда эта компонента связности будет деревом. Устроим в этом дереве волновой процесс, дав некоторой вершине 10, её соседям – 8, их новым соседям – 10 и т.д. Тогда на конце каждого ребра будут 8 и 10, что в сумме даёт 18. В остальных компонентах связности оценим все вершины 9.

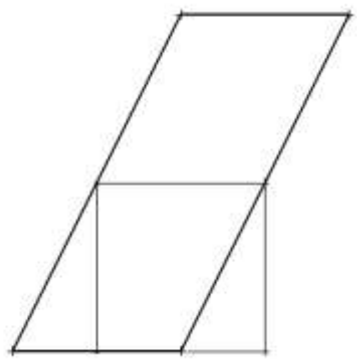
3. В ряд лежат 100 шариков трёх разных цветов. Известно, что в любой пятёрке подряд лежащих шариков есть шарики всех трёх цветов. Докажите, что найдётся и трёхцветная четвёрка подряд лежащих шариков. (*С.Г.Волченков*)

<u>Решение:</u> Рассмотрим первые 6 шариков. Пусть 1-й шарик – первого цвета. Если 5-й шарик будет тоже первого цвета, то среди шариков 1-4 будут все три цвета, т.к. среди 2-4 есть и второй, и третий цвет (если рассмотреть пятёрку 1-5). Пусть 5-й шарик – не первого цвета, тогда, можно считать, что он – второго цвета, тогда среди шариков 2-4 точно есть третий цвет (если рассмотреть пятёрку 1-5). Если среди шариков 2-4 есть второй цвет, то трёхцветной будет четвёрка 1-4, а если есть первый цвет, то трёхцветной будет четвёрка 2-5. Если же все три шарика 2-4 будут иметь третий цвет, то в пятёрке 2-6 у 6-го шарика должен быть первый цвет. Тогда четвёрка 3-6 будет трёхцветной.

4. Для зарядки полностью разряженного телефона требуется 5 часов, а хватает заряженного телефона на 1 час разговоров. У Фомы два зарядных устройства. Каждый час в комнату вбегает Ерёма и начинает звонить по одному из телефонов, пока тот полностью не разрядится. Сможет ли Фома полностью зарядить хотя бы один из пятидесяти разряженных телефонов?

<u>Ответ:</u> Сможет. ***<u>Пример:</u>*** Фома берёт 16 пар телефонов и каждый час заряжает одну новую пару. Ерёма каждый час забирает у него не более одного телефона из заряжавшихся. После 16 часов Фома имеет не менее 16 телефонов, заряженных на 1/5. После этого он поступает аналогично с 16 этими телефонами, учитывая, что Ерёма мог взять какие-то и другие телефоны. В результате через 8 часов у него будет не менее 8 телефонов, заряженных на 2/5, потом ещё через 4 часа – хотя бы 4 телефона, заряженных на 3/5, ещё через 2 часа – хотя бы 2 телефона, заряженных на 4/5, ещё через час – полностью заряженный телефон.

5. Плоскую жесткую квадратную картину со стороной 1 м удалось обернуть с двух сторон куском ткани в форме параллелограмма площади 2 кв. м. Обязательно ли этот параллелограмм является прямоугольником? (*А.В.Шаповалов*)

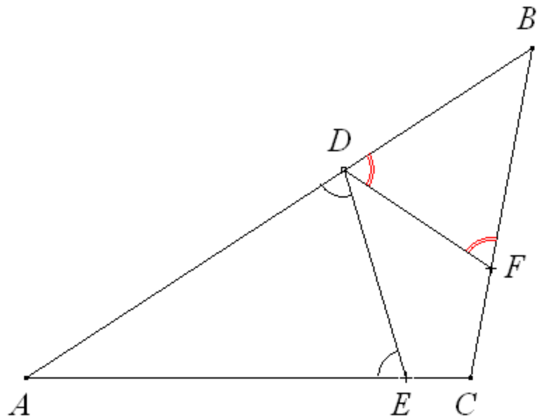


Ответ: Необязательно, см. контр-пример на рисунке. Одна из вершин параллелограмма находится в середине стороны квадрата.

6. Семья рыбаков – отец и 3 сына – хочет переправить боевую группу из 10 бойцов на Тайный остров архипелага в тылу врага. Есть двухместная лодка. Не запомнив дороги, без проводника её не проплыть. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но всех проводить он не сможет: путь лежит мимо Сторожевой башни, и каждый из них может пройти мимо неё не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Рыбак запоминает дорогу, если проплыл по ней один раз, а бойцу для этого надо проплыть туда и обратно. В конце все рыбаки должны быть дома, все бойцы – на острове, лодка – где придётся. Как организовать переправу? (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Обозначим за F – отца, A, B, C – его сыновей, а бойцов – цифрами от 0 до 9. Будем действовать следующим образом: F1→, F1←, FA→, F←, 12→, A2←, AB→, A←, 23→, B3←, BC→, B←, 34→, C4←, C5→, C←, 46→, 1←, 17→, 2←, 28→, 3←, 39→, 4←, 40→.

7. На сторонах *AB, AC* и *BC* треугольника *ABC* выбраны точки *D, E* и *F* соответственно такие, что *AE=AD, BF=BD.* Известно, что ∠*EDF*=40°. Найдите ∠*ECF*.



Ответ: 100°. ***Решение*:** Пусть ∠*A*=α, ∠*B*=β, тогда нужный нам ∠*ECF*=180°–α–β. Треугольники *AED* и *BDF* – равнобедренные, тогда углы при их основании ∠*ADE*=90°–α/2 и ∠*BDF*=90°–β/2, а их сумма равна 180°–(α+β)/2=180°–∠*EDF*=180°–40°. Значит, α+β=80°, а ∠*ECF*=180°–(α+β)=100°.

8. Шахматную доску разрезали по границам клеток на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдётся пара прямоугольников одинакового периметра. (*А.В.Шаповалов*)

***Решение*:** Предположим противное, что у всех прямоугольников различный периметр. Тогда аналогично идеям решения задачи №3 из полуфиналов получим, что суммарная площадь прямоугольников должна быть не меньше 1+2+3+4+5+6+7+8+16+24=76, что больше площади доски. Противоречие. Значит, есть прямоугольники одинакового периметра.